*שיעור ראשון*

**תורת הטורים – טורי מספרים**

תהיי סדרה של מספרים ממשיים (או מרוכבים) - .

סכום הסדרה עד n מסויים נרשם כך:

*כאשר הוא האיבר הראשון ו- הוא האיבר הכללי.*

*טור זה כאשר הסכום שואף לאינסוף ולא עד מסויים, כלומר:*

**התכנסות של טור-מספרים:**

אם מתכנסת אז אומרים שהטור מתכנס, סכום הטור הוא הגבול של , ול- קוראים סדרת הסכומים החלקיים.

בונים סכומים חלקיים של טור אחד:

סימון:

הגדרה חשובה: אומרים שטור מתכנס אם **קיים** גבול של סדרה של סכומים של קטעים (סכומים חלקיים):

אם לא קיים גבול אומרים שהסכום מתבדר.

**דוגמא 1:**

נתון הטור:

ניתן לרשום אותו טור בצורה הבא:

בונים סכומים חלקיים:

**דוגמא 2:**

נבדוק אם מתכנס או מתבדר:

ניקח את האיבר הכללי בצורה הבאה (ננסה לפרק אותו לשברים):

נשים לב:

מתקיים:

כלומר ניתן לרשום את האיבר הכללי כך:

האיברים הראשונים:

**תכונות של טורים מתכנסים:**

שאריות של טורים:

נתון התור:

השארית של הטור הוא החלק הבא (מה שנמצא אחרי האיבר ה- האיבר הכללי):

ובסכומים של טורים:

נציב:

**משפט**: אם הטור מתכנס אז השארית גם מתכנסת לאפס .

**טור הנדסי** , **או טור גאומטרי:**

בסכומים:

סכום סופי:

ניתן לרשום את הסכום גם בצורה:

למצאו גבול של :

מסקנה:

טור הנדסי:

**דוגמא 1:**

נתון הטור:

*שאלה – האם הטור הנ"ל מתכנס?*

*מכיוון שזהו טור הנדסי (כל איבר שווה לקודמו עם מכפלה של ), אז דרך חישוב הסכום הוא לפי הנוסחה:*

*כלומר:*

*מה שמעניין אותנו הוא הסכום כאשר שואף לאינסוף כלומר מה הגבול של הסכום:*

*לכן הטור מתכנס וסכומו .*

*הערה: לכל טור הנדסי אם מתקיים:*

**תנאי הכרחי להתכנסות של טור כללי:**

נתון תור:

נניח והטור מתכנס:

סכומים חלקיים

נשים לב שמתקיים:

*בשיוויון זה ניתן לחשב את הגבול:*

***משפט חזק מאוד:***

*אם טור מתכנס אזי*

*הערה: לפי המשפט, אם טור מתכנס אזי האיבר הכללי שואף ל-0, אבל אם איבר הכללי שואף ל-0 זה לא אומר בהרכח שהטור מתכנס, אם האיבר הכללי מתכנס למספר שונה מאפס אזי הטור מתבדר, המבחן הזה מטרתו לבדיקת התבדרות.*

*נתון טור:*

*ולכן מתבדר.*

**מבחנים להתכנסות של טורים מספרים חיוביים:**

|  |  |
| --- | --- |
| ***מבחן השוואה :*** | *נתונים שני טורים:*  *ומתקיים:*  *(כל האיברים בטור קטנים או שווים לאיברים בטור לפי האינדקסים).*  *אם טור A מתבדר אז גם טור B מתבדר.*  *אם טור B מתכנס אז גם טור A מתכנס.* |
| ***מחבן השוואה :*** | *נתונים שני טורים:*  *אם קיים גבול סופי של*  *אז או ששני הטורים מתכנסים או ששני הטורים מתבדרים.* |
| ***מבחן דלמבר או מבחן המנה:*** | *נתון הטור:*  *אם קיים הגבול* |
| ***מבחן קושי או מבחן השורש:*** | *נתון הטור:*  *אם קיים הגבול* |
| ***מבחן אינטגרלי:*** | *נתון הטור:*  *אם קיים אינטגרל*  *אזי מתכנסת, אם לא קיים האינטגרל אזי מתבדרת.* |